TN-726 - Métodos Numéricos

Zero da função ($f(x) = 0$)

Marcelo Zamith

e-mail:mzamith@ufrrj.br

https://www.dcc.ufrrj.br/~marcelo/

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - DCC

Introdução

Introdução

- o cálculo do zero da função tem utilização para uma família de problemas utilizados na engenharia, física e matemática;
- trata-se de determinar o(s) valor(es) de x, tal que $f(x) = 0$.

Introdução

- A matemática fornece métodos diretos para solução do zero da função;
- entretanto, alguns problemas são difíceis para encontrar a solução exata ou não apresentação solução exata.
- Há os métodos iterativos para esses casos.
- Algumas condições devem ser observadas para **convergência** do método.

Introdução

- o que queremos é resolver ?

Introdução

- o que queremos é resolver ?

$$f_1(x) = f_2(x)$$

- Por que?

Introdução

- o que queremos é resolver ?

$$f_1(x) = f_2(x)$$

- Por que?
  - porque resolver $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ é o mesmo que achar o zero da função ou suas raízes

Introdução

- o que queremos é resolver ?

$$f_1(x) = f_2(x)$$

- Por que?
  - porque resolver $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ é o mesmo que achar o zero da função ou suas raízes
  - porque queremos achar os valores de uma **função inversa** $g(x)$ em certos pontos

Introdução

- Exemplo: Qual o valor da função $f(x) = \sqrt[3]{10}$?

Introdução

- Exemplo: Qual o valor da função $f(x) = \sqrt[3]{10}$? e ai ?
  - Dado que $f(x) = \sqrt[3]{10}$, podemos reescrever pela função inversa;

Introdução

- Exemplo: Qual o valor da função $f(x) = \sqrt[3]{10}$? e ai ?
  - Dado que $f(x) = \sqrt[3]{10}$, podemos reescrever pela função inversa;
  - logo, considerando $g^{-1}(y)$, o problema $f(x) = \sqrt[3]{10}$ pode ser dado por $g(x) = x^3 - 10$;

Introdução

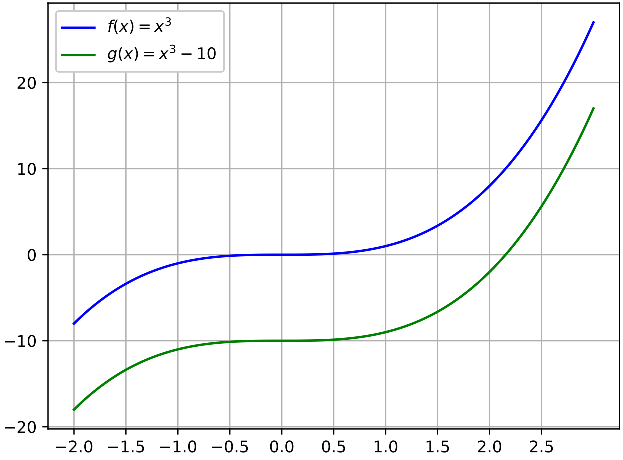
- Exemplo: Qual o valor da função $f(x) = \sqrt[3]{10}$? e ai ?
  - Dado que $f(x) = \sqrt[3]{10}$, podemos reescrever pela função inversa;
  - logo, considerando $g^{-1}(y)$, o problema $f(x) = \sqrt[3]{10}$ pode ser dado por $g(x) = x^3 - 10$;
  - Soluções:
    - $f(x) = \sqrt[3]{10} = 2.15443469003188$

Introdução

- Exemplo: Qual o valor da função $f(x) = \sqrt[3]{10}$? e ai ?
  - Dado que $f(x) = \sqrt[3]{10}$, podemos reescrever pela função inversa;
  - logo, considerando $g^{-1}(y)$, o problema $f(x) = \sqrt[3]{10}$ pode ser dado por $g(x) = x^3 - 10$;
  - Soluções:
    - $f(x) = \sqrt[3]{10} = 2.15443469003188$
    - $g(x) = 2.15443469003188^3 - 10 = 0 \leftarrow$

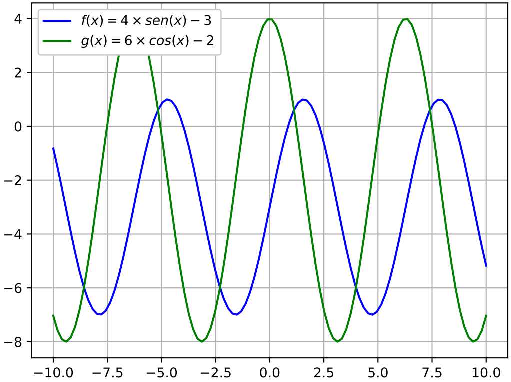
Introdução

- Exemplo: O valor da função $f(x) = \sqrt[3]{10} = 2.15443469003188$



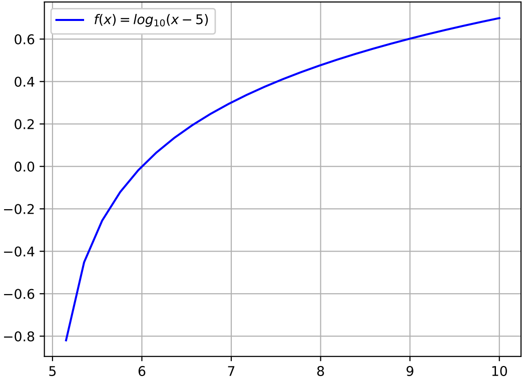
Introdução

- Mais exemplos:
  - $f(x) = 4 \times sen(x) - 3 = 0$
  - $g(x) = 6 \times cos(x) - 2 = 0$



Introdução

- E mais exemplo:
  - $log_{10}(x - 5) = 0$



Introdução

- Aproximação do valor para $f(x_k) \approx 0$:
  - Sendo ϵ uma precisão, podemos dizer que um ponto x_k é uma aproximação para um valor λ, tal que $f(x_k) \approx 0$, se as condições são atendidas:
    - $|f(x_k)| < \epsilon$
    - $|x_k - \lambda| < \epsilon$

Introdução

- A solução para achar a raiz ou raízes reais de $f(x)$ requer duas fases:
  - **Fase 1**: **Isolar** - determinar intervalos que contenham, cada um dos intervalos, apenas um único valor onde $f(x) = 0$.
  - **Fase 2**: **Refinamento** & **critério de parada** - utilização de métodos numéricos, com precisão pré-definida, chegar ao $f(x) = 0$.

Fase 1 - Isolando intervalos

- Gráfico:
  - A representação gráfica de uma função é uma fonte de informação útil sobre o comportamento da função, particularmente para definir os intervalos que contém $f(x) = 0$.
  - Além disso, o gráfico permite compreender o funcionamento dos métodos numéricos para determinar o valor de x para $f(x) = 0$.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
UFRRJ

Fase 1 - Isolando intervalos

Teorema

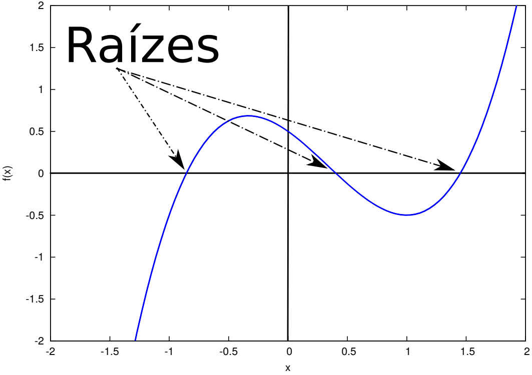
Seja $y = f(x)$ *é uma função contínua em um intervalo* $[a, b]$.

Se $f(a) \times f(b) < 0$, *então a equação* $f(x) = 0$ *tem um número ímpar de valores* xs *para* $f(x) = 0$ *no intervalo* (a, b). *Se* $f'(x)$ *preservar o sinal em* (a, b), *então há apenas um único valor neste intervalo.*

Fase 1 - Isolando intervalos

- Dada a função:

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + \frac{1}{2}$$



Fase 2 - Refinamento & Critério de parada

- **Refinamento**:
  - utilizado em vários métodos numéricos iterativos;
  - estratégia de como executa o refinamento; e,
  - consiste em uma **sequência de instruções que são executadas passo a passo**, algumas são repetidas em ciclos até alcançar o critério definido.
- **Critério de parada**:
  - interrompe o refinamento; e
  - define o quão próximo queremos chegar da solução.

Fase 2 - Refinamento & Critério de parada

- A iteração acaba de acordo com o critério utilizado:
  - **Erro absoluto**: $\frac{|x_i - x_{i-1}|}{max(1, |x_i|)} < \epsilon$
  - **Erro relativo**: $\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \epsilon$
  - **Valor da função**: $|f(x_i)| < \epsilon$

Os Métodos

Vamos estudar os métodos de determinação valores para $f(x) = 0$:

- Bisseção.
- Método da Falsa Posição.
- Newton-Raphson.
- Secante.

Método da Bisseção

Método da Bisseção

Teorema

Se $y = f(x)$ *é uma função contínua e muda de sinal no intervalo* $[a, b]$ *(isto é se* $f(a) \times f(b) < 0$*), então existe pelo menos um ponto* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) = 0$.

Método da Bisseção

Teorema

Se $y = f(x)$ *é uma função contínua e muda de sinal no intervalo* $[a, b]$ *(isto é se* $f(a) \times f(b) < 0$*), então existe pelo menos um ponto* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) = 0$*.*

Observação:

se $f'(x)$ não muda de sinal em $[a, b]$, há apenas um valor de x_i onde $f(x) = 0$ no intervalo.

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
UFRRJ

Método da Bisseção

- Para encontrar o zero da função, o método da bisseção busca reduzir o intervalo inicial com base no valor do ponto médio para $f(x)$.
- Dado o intervalo $[a, b]$:
  - i Se $f(a) \times f(\frac{a+b}{2}) < 0$, o novo intervalo é $[a, \frac{a+b}{2}]$
  - ii Se $f(b) \times f(\frac{a+b}{2}) < 0$, o novo intervalo é $[\frac{a+b}{2}, b]$

Método da Bisseção

Algoritmo 1: $\mathrm{MB}(f, a, b, \epsilon)$

Saída: x_0

```
x_0 ← a;
x_1 ← b;
repeat
    x_1 ← (a+b)/2;
    if f(x_1) × f(a) < 0 then
        b ← x_1;
    end
    else
        a ← x_1;
    end
    x_0 ← x_1;
until |x_1 − x_0| > ϵ;
```

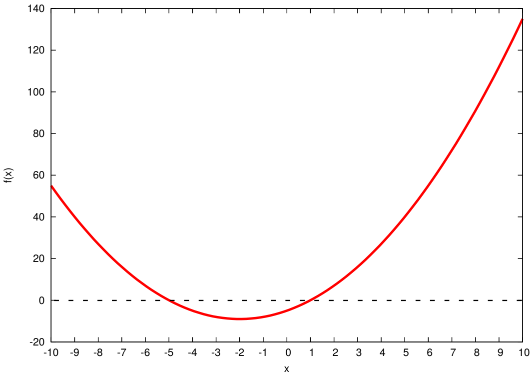
Método da Bisseção

- Adota uma estratégia semelhante a busca binária. É uma divisão por 2 a cada passo.
- A convergência do método é garantida, o algoritmo não saia do intervalo inicial. A cada iteração o intervalo é menor, dividido por dois.
- O método requer um bom "chute" inicial. O valor definido no passo zero define em quantas iterações o resultado será alcançado.

Método da Bisseção

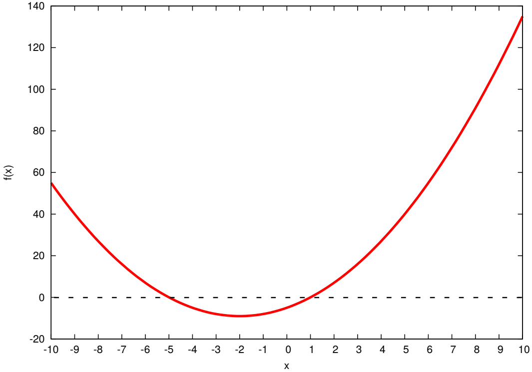
Algorítimo do método

- Exemplo:
  - Função: $f(x) = x^2 + 4 \times x - 5$
  - Raízes: $x_1 = -5$ e $x_2 = 1$



Método da Bisseção

Algorítimo do método



Algoritmo:

- Chute inicial (i = 1): $a = -1,\ b = 2$
  1. $x_i = \frac{-1+2}{2} = 0.5$
  2. $f(x_i) \times f(a) = f(0.5) \times f(-1) = 22 > 0$
  3. $a = x_i$
  4. $\epsilon = 1 \times 10^{-8}$

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a - b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^0

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}

UFRRJ
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a - b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a - b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}
9	0.9922	**1.0039**	0.9980	-0.0468	-0.0117	0.0005	1.17×10^{-2}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}
9	0.9922	**1.0039**	0.9980	-0.0468	-0.0117	0.0005	1.17×10^{-2}
10	**0.9980**	1.0039	1.0010	-0.0117	0.0059	-0.0001	5.86×10^{-3}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}
9	0.9922	**1.0039**	0.9980	-0.0468	-0.0117	0.0005	1.17×10^{-2}
10	**0.9980**	1.0039	1.0010	-0.0117	0.0059	-0.0001	5.86×10^{-3}
11	0.9980	**1.0010**	0.9995	-0.0117	-0.0029	0.0000	2.93×10^{-3}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a - b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}
9	0.9922	**1.0039**	0.9980	-0.0468	-0.0117	0.0005	1.17×10^{-2}
10	**0.9980**	1.0039	1.0010	-0.0117	0.0059	-0.0001	5.86×10^{-3}
11	0.9980	**1.0010**	0.9995	-0.0117	-0.0029	0.0000	2.93×10^{-3}
12	**0.9995**	1.0010	1.0002	-0.0029	0.0015	0.0000	1.46×10^{-3}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}
9	0.9922	**1.0039**	0.9980	-0.0468	-0.0117	0.0005	1.17×10^{-2}
10	**0.9980**	1.0039	1.0010	-0.0117	0.0059	-0.0001	5.86×10^{-3}
11	0.9980	**1.0010**	0.9995	-0.0117	-0.0029	0.0000	2.93×10^{-3}
12	**0.9995**	1.0010	1.0002	-0.0029	0.0015	0.0000	1.46×10^{-3}
13	0.9995	**1.0002**	0.9999	-0.0029	-0.0007	0.0000	7.32×10^{-4}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a - b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}
9	0.9922	**1.0039**	0.9980	-0.0468	-0.0117	0.0005	1.17×10^{-2}
10	**0.9980**	1.0039	1.0010	-0.0117	0.0059	-0.0001	5.86×10^{-3}
11	0.9980	**1.0010**	0.9995	-0.0117	-0.0029	0.0000	2.93×10^{-3}
12	**0.9995**	1.0010	1.0002	-0.0029	0.0015	0.0000	1.46×10^{-3}
13	0.9995	**1.0002**	0.9999	-0.0029	-0.0007	0.0000	7.32×10^{-4}
14	**0.9999**	1.0002	1.0001	-0.0007	0.0004	0.0000	3.66×10^{-4}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a - b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}
9	0.9922	**1.0039**	0.9980	-0.0468	-0.0117	0.0005	1.17×10^{-2}
10	**0.9980**	1.0039	1.0010	-0.0117	0.0059	-0.0001	5.86×10^{-3}
11	0.9980	**1.0010**	0.9995	-0.0117	-0.0029	0.0000	2.93×10^{-3}
12	**0.9995**	1.0010	1.0002	-0.0029	0.0015	0.0000	1.46×10^{-3}
13	0.9995	**1.0002**	0.9999	-0.0029	-0.0007	0.0000	7.32×10^{-4}
14	**0.9999**	1.0002	1.0001	-0.0007	0.0004	0.0000	3.66×10^{-4}
15	0.9999	**1.0001**	1.0000	-0.0007	-0.0002	0.0000	1.83×10^{-4}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}
9	0.9922	**1.0039**	0.9980	-0.0468	-0.0117	0.0005	1.17×10^{-2}
10	**0.9980**	1.0039	1.0010	-0.0117	0.0059	-0.0001	5.86×10^{-3}
11	0.9980	**1.0010**	0.9995	-0.0117	-0.0029	0.0000	2.93×10^{-3}
12	**0.9995**	1.0010	1.0002	-0.0029	0.0015	0.0000	1.46×10^{-3}
13	0.9995	**1.0002**	0.9999	-0.0029	-0.0007	0.0000	7.32×10^{-4}
14	**0.9999**	1.0002	1.0001	-0.0007	0.0004	0.0000	3.66×10^{-4}
15	0.9999	**1.0001**	1.0000	-0.0007	-0.0002	0.0000	1.83×10^{-4}
16	**1.0000**	1.0001	1.0000	-0.0002	0.0001	0.0000	9.16×10^{-5}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a - b\|$
1	-1.0000	2.0000	0.5000	-8.0000	-2.7500	22.0000	3.00×10^{0}
2	**0.5000**	2.0000	1.2500	-2.7500	1.5625	-4.2969	1.50×10^{0}
3	0.5000	**1.2500**	0.8750	-2.7500	-0.7344	2.0195	7.50×10^{-1}
4	**0.8750**	1.2500	1.0625	-0.7344	0.3789	-0.2783	3.75×10^{-1}
5	0.8750	**1.0625**	0.9688	-0.7344	-0.1865	0.1370	1.88×10^{-1}
6	**0.9688**	1.0625	1.0156	-0.1865	0.0940	-0.0175	9.38×10^{-2}
7	0.9688	**1.0156**	0.9922	-0.1865	-0.0468	0.0087	4.69×10^{-2}
8	**0.9922**	1.0156	1.0039	-0.0468	0.0235	-0.0011	2.34×10^{-2}
9	0.9922	**1.0039**	0.9980	-0.0468	-0.0117	0.0005	1.17×10^{-2}
10	**0.9980**	1.0039	1.0010	-0.0117	0.0059	-0.0001	5.86×10^{-3}
11	0.9980	**1.0010**	0.9995	-0.0117	-0.0029	0.0000	2.93×10^{-3}
12	**0.9995**	1.0010	1.0002	-0.0029	0.0015	0.0000	1.46×10^{-3}
13	0.9995	**1.0002**	0.9999	-0.0029	-0.0007	0.0000	7.32×10^{-4}
14	**0.9999**	1.0002	1.0001	-0.0007	0.0004	0.0000	3.66×10^{-4}
15	0.9999	**1.0001**	1.0000	-0.0007	-0.0002	0.0000	1.83×10^{-4}
16	**1.0000**	1.0001	1.0000	-0.0002	0.0001	0.0000	9.16×10^{-5}
17	1.0000	**1.0000**	1.0000	-0.0002	0.0000	0.0000	4.58×10^{-5}
18	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.29×10^{-5}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a-b\|$
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.14×10^{-5}
20	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	5.72×10^{-6}
21	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.86×10^{-6}
22	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.43×10^{-6}
23	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	7.15×10^{-7}
24	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3.58×10^{-7}
25	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.79×10^{-7}
26	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	8.94×10^{-8}
27	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4.47×10^{-8}
28	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.24×10^{-8}
29	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.12×10^{-8}

Método da Bisseção

iter.	a	b	$x_i = \frac{(a+b)}{2}$	$f(a)$	$f(x_i)$	$f(a) * f(x_i)$	$\|a - b\|$
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.14×10^{-5}
20	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	5.72×10^{-6}
21	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.86×10^{-6}
22	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.43×10^{-6}
23	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	7.15×10^{-7}
24	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	3.58×10^{-7}
25	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.79×10^{-7}
26	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	8.94×10^{-8}
27	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	4.47×10^{-8}
28	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	2.24×10^{-8}
29	1.0000	1.0000	1.0000	0.0000	0.0000	0.0000	1.12×10^{-8}

- A raiz real encontrada é $r = 1$, considerando o intervalo $a = -1$ e $b = 2$.

Método da Falsa Posição

Método da Falsa Posição

- Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$ onde existe uma raiz **única**, é possível determinar tal raiz a partir de subdivisões sucessivas do intervalo que a contém, substituindo $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ de cada iteração por uma **reta** e tomando como aproximação da raiz a intersecção da reta com o eixo das abscissas.

Método da Falsa Posição

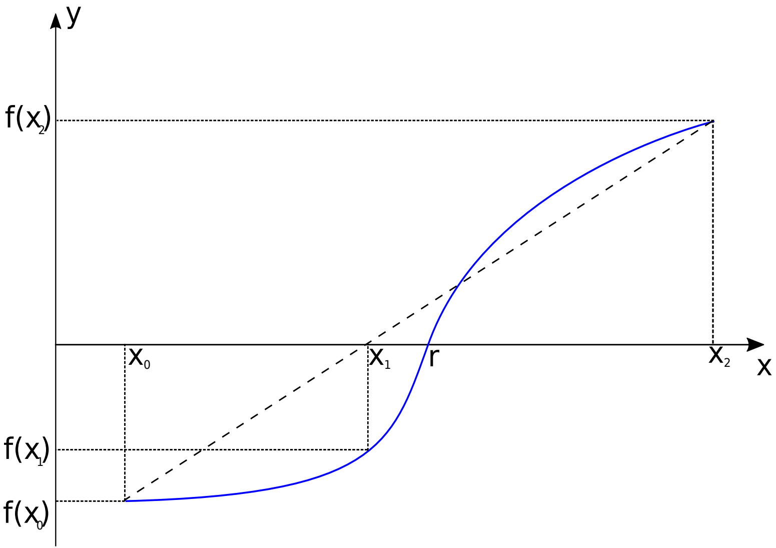
- Tomar como aproximação x para o valor de r, que é o zero da função, como a média ponderada dos extremos do intervalo $[a, b]$ com pesos $f(b)$ e $f(a)$ respectivamente.

Método da Falsa Posição

- Tomar como aproximação x para o valor de r, que é o zero da função, como a média ponderada dos extremos do intervalo $[a, b]$ com pesos $f(b)$ e $f(a)$ respectivamente.

$$x = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

Método da Falsa Posição



Método da Falsa Posição

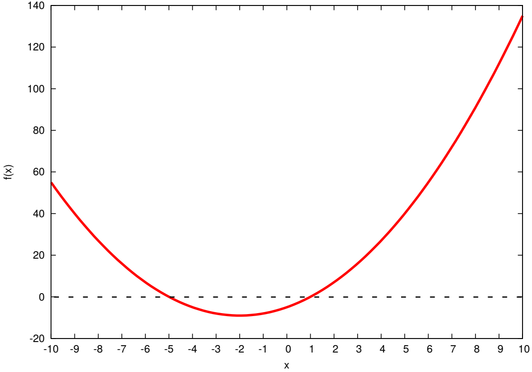
Algoritmo 2: $\mathrm{MFP}(f, a, b, \epsilon)$

Saída: x_0

$x_0 \leftarrow a$;
$x_1 \leftarrow b$;
repeat
    $x_1 \leftarrow \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$;
    if $f(x_1) < 0$ **then**
        $a \leftarrow x_1$;
    end
    else
        $b \leftarrow x_1$;
    end
    $x_0 \leftarrow x_1$;
until $|x_1 - x_0| > \epsilon$;

Método da Falsa Posição

- Exemplo:
  - Função: $f(x) = x^2 + 4 \times x - 5$
  - Raízes: $x_1 = -5$ e $x_2 = 1$

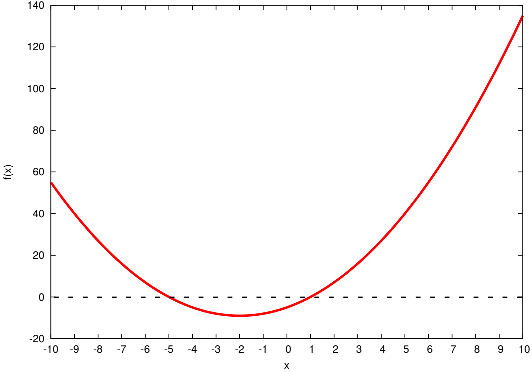


Método da Falsa Posição

Algoritmo:

- Chute inicial (i = 1): $a = -1,\ b = 2$

  1. $x_i = \frac{-1f(2)+2f(-1)}{f(2)+f(-1)} = 0.6$
  2. $f(x_i) = f(0.6) = -2.24 < 0$
  3. $a = x_i$



Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946
4	**0.99126638**	2.00000000	0.99875078	-0.00749375	0.00749377

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946
4	**0.99126638**	2.00000000	0.99875078	-0.00749375	0.00749377
5	**0.99875078**	2.00000000	0.99982151	-0.00107092	0.00107092

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946
4	**0.99126638**	2.00000000	0.99875078	-0.00749375	0.00749377
5	**0.99875078**	2.00000000	0.99982151	-0.00107092	0.00107092
6	**0.99982151**	2.00000000	0.99997450	-0.00015300	0.00015300

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946
4	**0.99126638**	2.00000000	0.99875078	-0.00749375	0.00749377
5	**0.99875078**	2.00000000	0.99982151	-0.00107092	0.00107092
6	**0.99982151**	2.00000000	0.99997450	-0.00015300	0.00015300
7	**0.99997450**	2.00000000	0.99999636	-0.00002186	0.00002186

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946
4	**0.99126638**	2.00000000	0.99875078	-0.00749375	0.00749377
5	**0.99875078**	2.00000000	0.99982151	-0.00107092	0.00107092
6	**0.99982151**	2.00000000	0.99997450	-0.00015300	0.00015300
7	**0.99997450**	2.00000000	0.99999636	-0.00002186	0.00002186
8	**0.99999636**	2.00000000	0.99999948	-0.00000312	0.00000312

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946
4	**0.99126638**	2.00000000	0.99875078	-0.00749375	0.00749377
5	**0.99875078**	2.00000000	0.99982151	-0.00107092	0.00107092
6	**0.99982151**	2.00000000	0.99997450	-0.00015300	0.00015300
7	**0.99997450**	2.00000000	0.99999636	-0.00002186	0.00002186
8	**0.99999636**	2.00000000	0.99999948	-0.00000312	0.00000312
9	**0.99999948**	2.00000000	0.99999993	-0.00000045	0.00000045

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946
4	**0.99126638**	2.00000000	0.99875078	-0.00749375	0.00749377
5	**0.99875078**	2.00000000	0.99982151	-0.00107092	0.00107092
6	**0.99982151**	2.00000000	0.99997450	-0.00015300	0.00015300
7	**0.99997450**	2.00000000	0.99999636	-0.00002186	0.00002186
8	**0.99999636**	2.00000000	0.99999948	-0.00000312	0.00000312
9	**0.99999948**	2.00000000	0.99999993	-0.00000045	0.00000045
10	**0.99999993**	2.00000000	0.99999999	-0.00000006	0.00000006

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946
4	**0.99126638**	2.00000000	0.99875078	-0.00749375	0.00749377
5	**0.99875078**	2.00000000	0.99982151	-0.00107092	0.00107092
6	**0.99982151**	2.00000000	0.99997450	-0.00015300	0.00015300
7	**0.99997450**	2.00000000	0.99999636	-0.00002186	0.00002186
8	**0.99999636**	2.00000000	0.99999948	-0.00000312	0.00000312
9	**0.99999948**	2.00000000	0.99999993	-0.00000045	0.00000045
10	**0.99999993**	2.00000000	0.99999999	-0.00000006	0.00000006
11	**0.99999999**	2.00000000	1.00000000	-0.00000001	0.00000001

Método da Falsa Posição

iter.	a	b	$x_i = \frac{af(b)-bf(a)}{f(b)-f(a)}$	$f(x_i)$	ER_x
1	-1.00000000	2.00000000	0.60000000	-2.24000000	1.00000000
2	**0.60000000**	2.00000000	0.93939394	-0.35996327	0.36129032
3	**0.93939394**	2.00000000	0.99126638	-0.05232547	0.05232946
4	**0.99126638**	2.00000000	0.99875078	-0.00749375	0.00749377
5	**0.99875078**	2.00000000	0.99982151	-0.00107092	0.00107092
6	**0.99982151**	2.00000000	0.99997450	-0.00015300	0.00015300
7	**0.99997450**	2.00000000	0.99999636	-0.00002186	0.00002186
8	**0.99999636**	2.00000000	0.99999948	-0.00000312	0.00000312
9	**0.99999948**	2.00000000	0.99999993	-0.00000045	0.00000045
10	**0.99999993**	2.00000000	0.99999999	-0.00000006	0.00000006
11	**0.99999999**	2.00000000	1.00000000	-0.00000001	0.00000001

- A raiz real encontrada é $r = 1$, considerando o intervalo $a = -1$ e $b = 2$.

Método da Falsa Posição

- Método da Falsa Posição (MFP) $\times$ Método da Bisseção (MB):
  - MB: calcula a média aritmética entre a e b.
  - MFP: calcula a média ponderada entre a e b com pesos $f(b)$ e $f(a)$, respectivamente.

Exercício

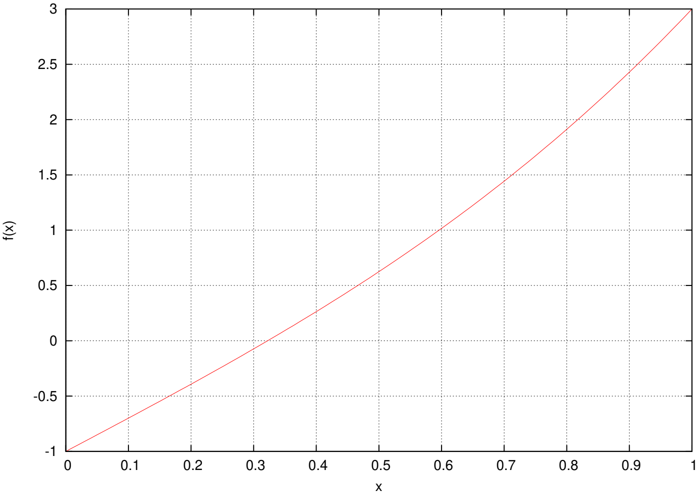
- Usando um dos dois métodos (Bisseção ou Falsa Posição), ache as raízes das funções:

  i $f(x) = x^3 + 3x - 1$

  ii $f(x) = x \times logx - 1$

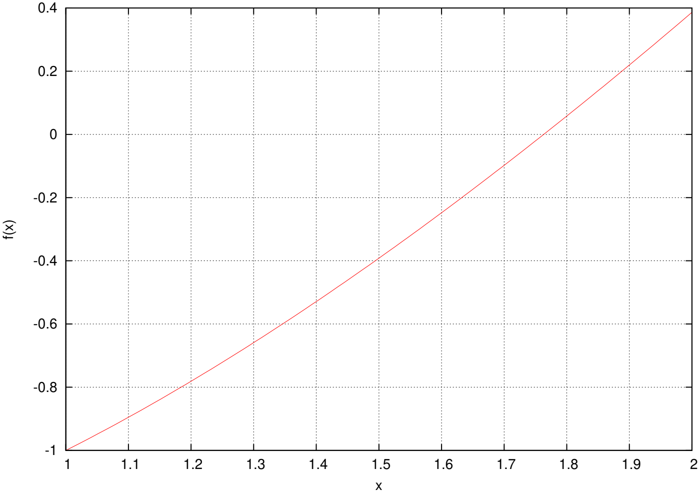
Exercício

i Gráfico da função $f(x) = x^3 + 3x - 1$:



Exercício

ii Gráfico da função $f(x) = x \times log x - 1$:



Método de Newton-Raphson

Método de Newton-Raphson

- Dada uma função $f(x)$ contínua no intervalo $[a, b]$, onde existe uma única raiz, é possível encontrar uma aproximação de tal raiz a partir da interseção da tangente à curva em um ponto x_0 com o eixo das abscissas.
- x_0 – atribuído em função da geometria do método e do comportamento da curva da equação nas proximidades da raiz.

Método de Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson não precisa de um **intervalo inicial**. O método considera que a curva no ponto inicial pode ser aproximada com a reta **tangente à curva nesse ponto**.

Método de Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson não precisa de um **intervalo inicial**. O método considera que a curva no ponto inicial pode ser aproximada com a reta **tangente à curva nesse ponto**.
- Logo, a partir de x_0, a sequencia de raízes para o Método de Newton-Raphson é pela função de iteração:

Método de Newton-Raphson

- O método de Newton-Raphson não precisa de um **intervalo inicial**. O método considera que a curva no ponto inicial pode ser aproximada com a reta **tangente à curva nesse ponto**.
- Logo, a partir de x_0, a sequencia de raízes para o Método de Newton-Raphson é pela função de iteração:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Método de Newton-Raphson

Algoritmo 3: $\mathrm{NH}(f, f', x, \epsilon)$

Saída: x_i

```
x_0 ← x_− f(x)/f'(x);
repeat
    x_1 ← x_0 − f(x_0)/f'(x_0);
    EA = |x_1 − x_0|;
    x_0 ← x_1;
until EA > ε;
```

$x_0 \leftarrow x_{-} \frac{f(x)}{f'(x)}$;

repeat

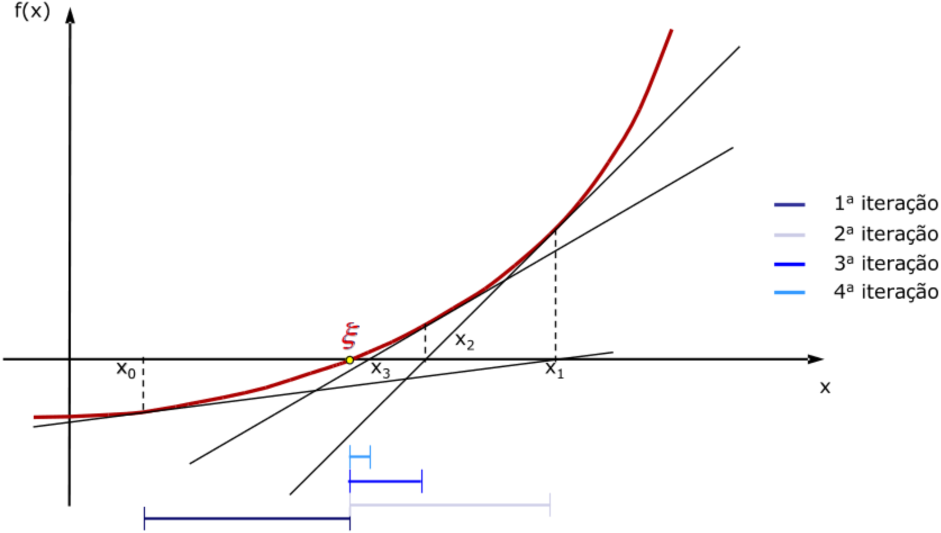
$\quad x_1 \leftarrow x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$;

$\quad EA = |x_1 - x_0|$;

$\quad x_0 \leftarrow x_1$;

until $EA > \epsilon$;

Método de Newton-Raphson



Método de Newton-Raphson

Fundamentação teórica:

Teorema

Sejam $f(x)$. $f'(x)$ e $f''(x)$ contínuas num intervalo I que contém a raiz $x = r$ de $f(x) = 0$ e supondo que $f'(r) \neq 0$, existira um intervalo $\bar{I} \subseteq I$ contendo um valor de r para o zero da função, tal que se $x_0 \in \bar{I}$, a sequência x_i gerada pela fórmula recursiva $x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$ convergirá para a raiz.

Método de Newton-Raphson

Exemplo:

- $f(x) = x^3 + 3x - 1$
- $f'(x) = 3x^2 + 3$
- $x_1 = 2$

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
2	13	15	0

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
2	13	15	0
1.1333333333	3.8557037037	5.5688888889	0.8666666667

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
2	13	15	0
1.1333333333	3.8557037037	5.5688888889	0.8666666667
0.4409683426	0.4086526800	3.3889061584	0.6923649907

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
2	13	15	0
1.1333333333	3.8557037037	5.5688888889	0.8666666667
0.4409683426	0.4086526800	3.3889061584	0.6923649907
0.3203829204	-0.0059654648	3.2052904314	0.1205854222

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
2	13	15	0
1.1333333333	3.8557037037	5.5688888889	0.8666666667
0.4409683426	0.4086526800	3.3889061584	0.6923649907
0.3203829204	-0.0059654648	3.2052904314	0.1205854222
0.3222440512	0.0001943719	3.2076824571	0.0018611308

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
2	13	15	0
1.1333333333	3.8557037037	5.5688888889	0.8666666667
0.4409683426	0.4086526800	3.3889061584	0.6923649907
0.3203829204	-0.0059654648	3.2052904314	0.1205854222
0.3222440512	0.0001943719	3.2076824571	0.0018611308
0.3221834555	-0.0000062888	3.2076043580	6.05957282590053E-05

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
2	13	15	0
1.1333333333	3.8557037037	5.5688888889	0.8666666667
0.4409683426	0.4086526800	3.3889061584	0.6923649907
0.3203829204	-0.0059654648	3.2052904314	0.1205854222
0.3222440512	0.0001943719	3.2076824571	0.0018611308
0.3221834555	-0.0000062888	3.2076043580	6.05957282590053E-05
0.3221854161	0.0000002035	3.2076068847	1.96058637497165E-06

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
2	13	15	0
1.1333333333	3.8557037037	5.5688888889	0.8666666667
0.4409683426	0.4086526800	3.3889061584	0.6923649907
0.3203829204	-0.0059654648	3.2052904314	0.1205854222
0.3222440512	0.0001943719	3.2076824571	0.0018611308
0.3221834555	-0.0000062888	3.2076043580	6.05957282590053E-05
0.3221854161	0.0000002035	3.2076068847	1.96058637497165E-06
0.3221853526	-0.0000000066	3.2076068029	6.34481899797201E-08

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\|x_i - x_{i-1}\|$
2	13	15	0
1.1333333333	3.8557037037	5.5688888889	0.8666666667
0.4409683426	0.4086526800	3.3889061584	0.6923649907
0.3203829204	-0.0059654648	3.2052904314	0.1205854222
0.3222440512	0.0001943719	3.2076824571	0.0018611308
0.3221834555	-0.0000062888	3.2076043580	6.05957282590053E-05
0.3221854161	0.0000002035	3.2076068847	1.96058637497165E-06
0.3221853526	-0.0000000066	3.2076068029	6.34481899797201E-08
0.3221853547	0.0000000002	3.2076068056	2.05328598568144E-09

Método de Newton-Raphson

x_{i+1}	$f(x_i)$	$f'(x_i)$	$\lvert x_i - x_{i-1} \rvert$
2	13	15	0
1.1333333333	3.8557037037	5.5688888889	0.8666666667
0.4409683426	0.4086526800	3.3889061584	0.6923649907
0.3203829204	-0.0059654648	3.2052904314	0.1205854222
0.3222440512	0.0001943719	3.2076824571	0.0018611308
0.3221834555	-0.0000062888	3.2076043580	6.05957282590053E-05
0.3221854161	0.0000002035	3.2076068847	1.96058637497165E-06
0.3221853526	-0.0000000066	3.2076068029	6.34481899797201E-08
0.3221853547	0.0000000002	3.2076068056	2.05328598568144E-09
0.3221853546	0.0000000000	3.2076068055	6.64469590461181E-11

Método de Newton-Raphson

Convergência:

A convergência desses métodos é mais rápida que no caso da bisseção. O método da bisseção usa sempre o mesmo algoritmo para qualquer função, enquanto Método de Newton-Raphson usa o comportamento da curva (derivada) para se aproximar da raiz.

Método de Newton-Raphson

- Exercício: Ache o zero da função ($f(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 1$) usando o método Newton-Raphson.
    - Utilize $x_1 = 2$ e $\epsilon = 0.0001$

Método da Secante

Método da Secante

- Método de Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

Método da Secante

- Método de Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- Converge se $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$ for suficientemente pequeno.
- Precisa calcular a derivada!

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
UFRRJ

Método da Secante

- Método de Newton-Raphson:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

- Converge se $|x_{i+1} - x_i| < \epsilon$ for suficientemente pequeno.
- Precisa calcular a derivada!

E se a derivada não for conhecida ?

Método da Secante

- Sabe-se que:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

Método da Secante

- Sabe-se que:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

- O método de Newton-Raphson é conhecido como método das secantes quando a aproximação acima é usada

Método da Secante

- Sabe-se que:

$$f'(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$$

- O método de Newton-Raphson é conhecido como método das secantes quando a aproximação acima é usada

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}$$

Método da Secante

- Logo temos:

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

Método da Secante

- Logo temos:

$$x_{i+1} = \frac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$

- A condição inicial depende de dois pontos.
- Critério de parada: $\frac{|x_{i+1} - x_i|}{x_{i+1}} \leq \epsilon$

Método da Secante

Algoritmo 4: $\mathrm{MS}(f, x_0, x_1, \epsilon)$

Saída: x_i

repeat

$\quad x_{i+1} \leftarrow \frac{x_{i-1} f(x_i) - x_i f(x_{i-1})}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$;

$\quad EA = |x_1 - x_0|$;

$\quad x_0 \leftarrow x_1$;

until $EA > \epsilon$;

Método da Secante

Exemplo:

- $f(x) = x^3 + 3x - 1$
- $x_0 = 0$ e $x_1 = 0.5$

Método da Secante

i	x_i	$f(x_i)$	$\frac{\lvert x_{i+1}-x_i \rvert}{x_{i+1}} \leq \epsilon$
0	0	-1	-
1	0.5	0.5	-

Método da Secante

i	x_i	$f(x_i)$	$\frac{\lvert x_{i+1} - x_i \rvert}{x_{i+1}} \leq \epsilon$
0	0	-1	-
1	0.5	0.5	-
2	0.3333333333	0	0.5

Método da Secante

i	x_i	$f(x_i)$	$\frac{\lvert x_{i+1} - x_i \rvert}{x_{i+1}} \leq \epsilon$
0	0	-1	-
1	0.5	0.5	-
2	0.3333333333	0	0.5
3	0.3333333333	0	0

UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO
UFRRJ